

***Перелік екзаменаційних питань з курсу
«Методи математичної фізики» (2016—2017)***

Запитання з розділу «Комплексний аналіз»

- 1) Комплексні числа. Означення, модуль та аргумент комплексного числа. Зображення комплексних чисел. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа.
- 2) Комплексні числа. Означення, модуль та аргумент комплексного числа. Зображення комплексних чисел. Матричне зображення комплексних чисел.
- 3) Основні операції над комплексними числами та поле комплексних чисел. Алгебраїчна замкненість поля комплексних чисел.
- 4) Послідовності комплексних чисел. Граничні точки. Нескінченно віддалена точка та компактифікація поля комплексних чисел. Стереографічна проєкція. Сфера Рімана.
- 5) Функція комплексної змінної. Однозначні, багатозначні, багатолісті функції.
- 6) Функція комплексної змінної. Неперервні функції. Інтеграл від функції комплексної змінної: означення, зв'язок із дійсними інтегралами, умови існування, теорема про оцінку інтеграла.
- 7) Елементарні функції комплексної змінної: функція $w = z^n$. Властивості (однозначність, області однолистості, аналітичні властивості).
- 8) Елементарні функції комплексної змінної: функція $w = z^{1/n}$. Властивості (однозначність, області однолистості, аналітичні властивості).
- 9) Елементарні функції комплексної змінної: функція Жуковського $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Властивості (однозначність, області однолистості, аналітичні властивості).
- 10) Елементарні функції комплексної змінної: показникова функція. Властивості (однозначність, області однолистості, аналітичні властивості).
- 11) Елементарні функції комплексної змінної: логарифм. Властивості (однозначність, області однолистості, аналітичні властивості).
- 12) Елементарні функції комплексної змінної: тригонометричні функції. Властивості (однозначність, області однолистості, аналітичні властивості).
- 13) Елементарні функції комплексної змінної: гіперболічні функції. Властивості (однозначність, області однолистості, аналітичні властивості).

- 14) Елементарні функції комплексної змінної: узагальнена степенева функція $w = z^\alpha$. Властивості (однозначність, області однолистості, аналітичність властивості).
- 15) Похідна функції комплексної змінної. Формальні похідні Коші. Аналітична функція.
- 16) Умови Коші-Рімана в декартових, полярних і довільних ортогональних координатах.
- 17) Аналітичні функції. Означення та основні властивості аналітичних функцій.
- 18) Геометрична інтерпретація аналітичної функції. Зміст модуля та аргументу похідної. Поняття конформного відображення.
- 19) Гармонічні функції. Аналітичні та спряжені гармонічні функції. Побудова гармонічної функції за спряженою.
- 20) Інтеграл вздовж замкненого контура від аналітичної функції в однозв'язній та багатозв'язній області. Інтегральна теорема Коші.
- 21) Інтегральна формула Коші. Теорема про середнє значення. Теорема про максимум модуля.
- 22) Формула Коші для похідної аналітичної функції. Оцінки модуля похідної аналітичної функції. Нескінченна диференційовність аналітичної функції.
- 23) Три означення аналітичної функції. Теорема Ліувілля. Теорема Морера.
- 24) Аналітичні функції та степеневі ряди. Представлення аналітичної функції степеневим рядом Тейлора.
- 25) Нулі аналітичної функції. Єдиність задання аналітичної функції. Аналітичне продовження.
- 26) Представлення рядом Лорана однозначної функції, що аналітична в кільці.
- 27) Класифікація особливих точок однозначних аналітичних функцій. Цілі функції. Мероморфні функції.
- 28) Поведінка однозначної аналітичної функції в околі в околі полюса.
- 29) Цілі функції. Мероморфні функції. Поведінка однозначної аналітичної функції в околі в околі істотно особливої точки.
- 30) Лишок та способи його обрахування. Методи обрахунку лишка однозначної аналітичної функції в околі полюса.
- 31) Лишок та способи його обрахування. Методи обрахунку лишка однозначної аналітичної функції в околі істотно особливої точки.
- 32) Лишок в нескінченно віддаленій точці. Методи обрахунку лишка однозначної аналітичної функції на нескінченності.
- 33) Основна теорема теорії лишків. Обчислення контурних інтегралів.

- 34) Основна теорема теорії лишків. Теорема про повну суму лишків.
- 35) Обчислення невластних інтегралів дійсного аналізу за допомогою теорії лишків. Інтеграли від тригонометричних функцій.
- 36) Обчислення невластних інтегралів дійсного аналізу за допомогою теорії лишків. Невласні інтеграли.
- 37) Обчислення невластних інтегралів дійсного аналізу за допомогою теорії лишків. Лема Жордана та інтеграли типу інтегралів Фур'є.
- 38) Логарифмічний лишок. Принцип аргументу.
- 39) Підрахунок кількості нулів аналітичної функції. Теорема Руше.
- 40) Плоскі векторні поля. Потенціальні та соленоїдальні поля.
- 41) Комплексний потенціал. Побудова еквіпотенціалей та силових ліній плоского векторного поля за комплексним потенціалом.
- 42) Аналітична функція як комплексний потенціал. Критичні та особливі точки та їх фізична інтерпретація.
- 43) Інваріантність оператора Лапласа відносно конформних відображень.
- 44) Конформні відображення. Перетворення Мебіуса (дробово-лінійні відображення). Основні властивості.
- 45) Перетворення Мебіуса (дробово-лінійні відображення). Конформні ізоморфізми та автоморфізми.
- 46) Конформні відображення. Класи конформно ізоморфних областей. Канонічні області.
- 47) Побудова конформного відображення круга на круг.
- 48) Побудова конформних відображення півплощини на круг.
- 49) Основна задача теорії конформних відображень. Теорема Рімана. Нормування конформного відображення.
- 50) Відображення багатокутників. Інтеграл Кристоффеля-Шварца.
- 51) Задача Діріхле. Розв'язання задачі Діріхле за допомогою функції Гріна. Функція Гріна задачі Діріхле. Означення, фізичний зміст.
- 52) Задача Діріхле. Розв'язання задачі Діріхле за допомогою функції Гріна. Формула Гріна.
- 53) Побудова функції Гріна для півплощини. Розв'язок задачі Діріхле для півплощини.
- 54) Побудова функції Гріна для круга. Розв'язок задачі Діріхле для круга.
- 55) Кватерніони. Означення і основні властивості кватерніонів. Алгебра кватерніонів.
- 56) Аналітичні функції кватерніонної змінної. Кватерніонна електродинаміка.

Запитання з розділу «Рівняння математичної фізики»

- 57) Класифікація та зведення лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку до канонічного вигляду. Характеристики.
- 58) Розв'язок неоднорідного рівняння дифузії на відрізку методом відокремлення змінних. Приклад.
- 59) Розв'язок рівняння дифузії на відрізку методом відокремлення змінних. Випадок неоднорідних межових умов. Приклад.
- 60) Розв'язок хвильового рівняння на відрізку методом відокремлення змінних. Приклад.
- 61) Розв'язок рівняння Лапласа в прямокутнику методом відокремлення змінних. Приклад.
- 62) Розв'язок рівняння Лапласа в крузі та кільці методом відокремлення змінних. Приклад.
- 63) Розв'язок рівняння Лапласа в кільці методом відокремлення змінних. Приклад.
- 64) Умови відокремлення змінних у двовимірному рівнянні Гельмгольца. Системи координат, в яких відокремлюються змінні для двовимірного рівняння Гельмгольца. Випадок декартових координат.
- 65) Умови відокремлення змінних у двовимірному рівнянні Гельмгольца. Системи координат, в яких відокремлюються змінні для двовимірного рівняння Гельмгольца. Випадок полярних координат.
- 66) Умови відокремлення змінних у двовимірному рівнянні Гельмгольца. Системи координат, в яких відокремлюються змінні для двовимірного рівняння Гельмгольца. Випадок еліптичних координат.
- 67) Умови відокремлення змінних у двовимірному рівнянні Гельмгольца. Системи координат, в яких відокремлюються змінні для двовимірного рівняння Гельмгольца. Випадок параболічних координат.
- 68) Гармонічні поліноми та їх властивості. Лема Лапласа та теорема про кількість лінійно-незалежних поліномів.
- 69) Сферичні функції: означення і основні властивості. Приклад.
- 70) Ортогональність та повнота системи сферичних функцій на сфері одиничного радіусу. Диференціальне рівняння для сферичних функцій. Оператор Бельтрамі.
- 71) Представлення фундаментального розв'язку рівняння Лапласа у вигляді ряду по сферичних функціях у випадку, коли особлива точка фундаментального розв'язку і центр координат не збігаються.
- 72) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в сферичних координатах.

- 73) Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі методом відокремлення змінних. Приклад.
- 74) Означення та класифікація циліндричних функцій. Співвідношення між циліндричними функціями Беселя, Неймана та Ханкеля. Інтегральні зображення циліндричних функцій.
- 75) Циліндричні функції у випадку, коли незалежна змінна прямує до нуля. Приклади.
- 76) Циліндричні функції у випадку, коли незалежна змінна прямує до нескінченності. Приклади.
- 77) Метод перевалу. Приклади.
- 78) Диференціальне рівняння для циліндричних функцій.
- 79) Задача Штурма–Ліувілля для циліндричних функцій. Нормування циліндричних функцій.
- 80) Ортогональність і повнота системи циліндричних функцій на відрізку. Ряди Фур'є-Бесселя.
- 81) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах.
- 82) Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі методом відокремлення змінних. Випадок неоднорідних умов на основі циліндру. Приклад.
- 83) Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі методом відокремлення змінних. Випадок неоднорідних умов на бічній поверхні циліндру. Модифіковані циліндричні функції. Приклад.
- 84) Означення узагальнених функцій. Означення та приклади регулярних та сингулярних узагальнених функцій.
- 85) Простори основних функцій. Властивості основних функцій. Ядро осереднення.
- 86) Заміна змінних в узагальнених функціях. Приклади. Множення узагальнених функцій на основну функцію. Приклади.
- 87) Диференціювання узагальнених функцій. Похідна від функції Хевісайда і δ -функції. Приклади.
- 88) Прямий (зовнішній) добуток і згортка узагальнених функцій. Приклади.
- 89) Узагальнені функції повільного зростання. Перетворення Фур'є узагальнених функцій. Приклади.
- 90) Означення δ -функції та її фізична інтерпретація. Диференціювання та заміна змінної в δ -функції. Збіжність в просторі узагальнених функцій. δ -подібні послідовності.
- 91) Множення δ -функції на основну функцію. Згортка δ -функції з узагальненими функціями. Перетворення Фур'є від δ -функції.

- 92) Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального рівняння. Теорема про існування та єдиність розв'язку лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.
- 93) Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального рівняння із звичайними похідними. Приклади.
- 94) Розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння за допомогою фундаментального розв'язку. Приклади.
- 95) Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії в n -вимірному просторі.
- 96) Розв'язок задачі Коші та межових задач з однорідними межовими умовами для n -вимірного рівняння дифузії.
- 97) Метод спуску. Приклади.
- 98) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в одновимірному просторі. Розв'язок задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння. Збудження хвиль точковим джерелом.
- 99) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в двовимірному просторі. Розв'язок задачі Коші для двовимірного хвильового рівняння. Збудження хвиль точковим джерелом.
- 100) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в тривимірному просторі. Розв'язок задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння. Збудження хвиль точковим джерелом.

Приклад питань екзаменаційного білету

Екзаменаційний білет № 0

Запитання 1. Комплексні числа. Означення, модуль та аргумент комплексного числа. Зображення комплексних чисел. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Приклад. Знайти всі корені рівняння $z^8 + i = 1$.

Запитання 2. За допомогою теорії лишків обчислити невластний інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos(kx) dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)},$$

де $a > 0, b > 0, k > 0$.

Запитання 3. Метод перевалу. Приклад. За допомогою методу перевалу обчислити асимптотичне значення функції

$$F(x) = \int_{\Gamma} z \exp\left(\frac{xz^3}{3} - xz\right) dz, \quad \Gamma = \{z(t) : z = 3t, t \in [-1; 1]\}$$

при $x \rightarrow +\infty$.

Запитання 4. Методом фундаментальних розв'язків розв'язати одновимірну задачу Коші для хвильового рівняння:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{\alpha t} \delta(x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \delta(1 - |x|), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

де $\alpha > 0$.